

Kapillarstatik

Mathematischer Samstag

Patrick Schneider

28.10.2006

Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort	3
2	Oberflächenspannung	3
2.1	Oberflächenspannung im Alltag	3
2.2	Zustandekommen der Oberflächenspannung	4
2.3	Definition der Oberflächenspannung	6
2.4	Ein einfaches Beispiel	6
2.5	Tropfpipette	7
3	Krümmung	8
3.1	Zusammenhang zwischen Druck und Krümmung	8
3.2	Differentialgeometrie einer parametrisierten Kurve (2D)	8
3.3	Ein Differentialausdruck für die Krümmung (2D)	9
3.3.1	Die zweite Herleitung	10
3.3.2	Die erste Herleitung	11
3.4	Krümmung einer Fläche (3D)	12
4	Erster Satz von Laplace	13
4.1	Herleitung	13
4.2	Einfache Beispiele	15
5	Spreitung und Randwinkel	15
6	Kapillares Steigen	16
7	Meniskuskontur an ebener Wand	18

1 Vorwort

Dies ist ein Skript zu einem Vortrag über Kapillarstatik. Diese beschäftigt sich mit statischen Phänomenen im Zusammenhang mit der Oberflächenspannung. Es entstand im Rahmen der Vortagreihe „Mathematischer Samstag“ am „Söderblomgymnasium Espelkamp“ und richtet sich somit an die Schüler der gymnasialen Oberstufe, die diesen Vortrag gehört haben, um ihn nacharbeiten zu können.

Einige der Abbildungen sind aus den Lehrbüchern „Greiner und Stock“ und „Herbert Siegloch: Technische Fluidmechanik“ sowie aus einem Skript zu „Strömungen mit freien Oberflächen“ von „PD Dr. Ing. M.Dreyer ZARM Uni Bremen“ entnommen.

Der Vortrag stellt die etablierten Grundlagen zum Thema zusammen und behandelt einige Beispiele. Wörtliche Zitate wurden nicht verwendet. Für das Korrekturlesen danke ich: Janina Köper, Bernhard Waldmüller und Sören Dobberschütz.

2 Oberflächenspannung

2.1 Oberflächenspannung im Alltag



Abbildung 1: Münze gehalten durch Oberflächenspannung

Einige Oberflächenspannungseffekte hat jeder von uns schon einmal im Alltag beobachtet.

- Wasserläufer
- Es ist möglich, eine Büroklammer auf der Wasseroberfläche eines gefüllten Wasserglases abzulegen, ohne dass sie untergeht.
- Kapillares Steigen

Generell scheint die Wasseroberfläche von einer Art elastischer Membran zusammengehalten zu werden.

2.2 Zustandekommen der Oberflächenspannung

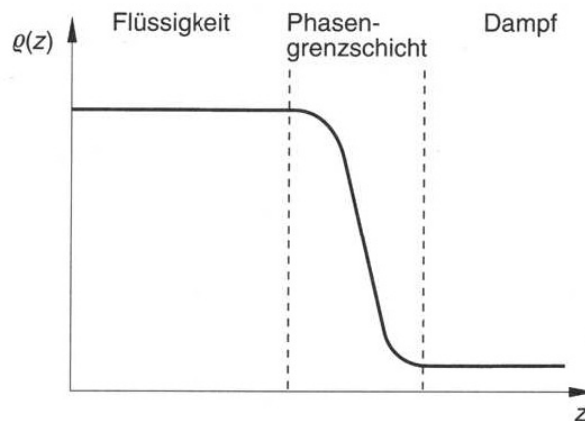


Abbildung 2: Phasengrenzschicht - lokale Dichte über Höhe normal zur Phasengrenze

Zunächst sei angemerkt, dass wir, wenn wir eine Phasengrenze zwischen zwei Fluiden (z.B.: einer Flüssigkeit und einem Gas) betrachten, stets eine *Grenzschicht* betrachten (siehe Abb. 2). Die Dichte der Flüssigkeit ändert sich kontinuierlich innerhalb weniger Moleküllagen auf die Dichte des Gases. Diese Schicht hat etwa die Dicke von $1 - 2 \text{ nm}$. Wir werden im Folgenden jedoch stets von einer Grenzfläche sprechen und setzen damit eine diskontinuierliche Dichteänderung voraus.

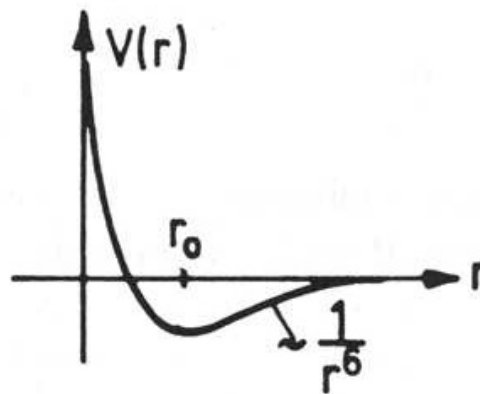


Abbildung 3: Lennard-Jones Potential

Die Ursache für die Oberflächenspannung sind molekulare Kräfte. Eines der einfachsten Modelle für molekulare Kräfte, das sowohl Massenanziehungskräfte wie auch elektrische Feldkräfte bei polaren Molekülen berücksichtigt, führt auf ein effektives Potential in Abhängigkeit vom Abstand der Molekülzentren (Lennard-Jones Potential, Abb. 3).

Wir betrachten den Graphen (Abb 3) und erkennen:

- Es gibt einen stabilen Molekülabstand r_0 (Potentialmulde)
- In guter Näherung sind molekulare Kräfte räumlich auf einen Abstand R beschränkt (asymptotisch stabil)

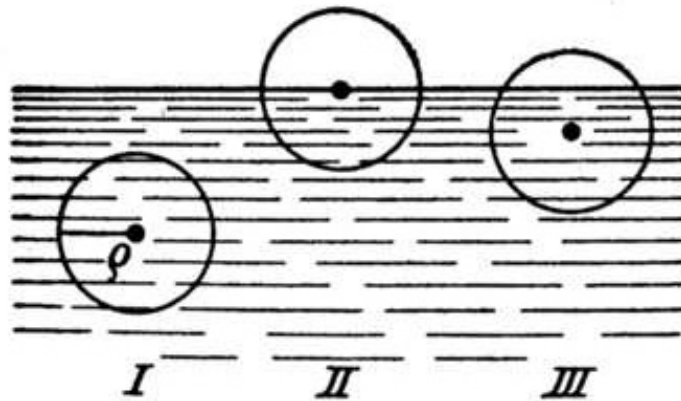


Abbildung 4: Molekulare Kräfte an der freien Oberfläche

Nun betrachten wir eine plane Flüssigkeitsoberfläche (Abb. 4) und vernachlässigen aufgrund der geringeren Dichte molekulare Kräfte in der Gasphase. Wir erkennen:

- Ein Molekül, das sich im Inneren der Flüssigkeit befindet, wird von allen Seiten her von Molekülen im Abstand R gleich stark angezogen. Es resultiert keine Kraft.
- Ein Molekül, das sich in einem Abstand von weniger als R zur Oberfläche befindet, wird stärker in die Flüssigkeit hineingezogen, als heraus. Es resultiert eine Kraft, die normal zur Oberfläche in die Flüssigkeit hinein wirkt. (Kohäsionsdruck)
- Die Stärke der Resultierenden ist von dem Abstand normal zur Oberfläche abhängig

Das bedeutet:

- Wir müssen Arbeit aufwenden, um ein Molekül in die freie Oberfläche zu bewegen.
- Der umgekehrte Vorgang ist mit einem Zugewinn an Energie verbunden.

Das heißt, die Oberfläche strebt gewissermaßen danach, sich zu verkleinern – sie zieht sich zusammen. Eine freie Oberfläche, auf die keine äußeren Kräfte wirken, bildet eine Minimalfläche.

2.3 Definition der Oberflächenspannung

Die spezifische Arbeit, die aufgewendet werden muss, um die Oberfläche zu vergrößern, definieren wir als *Oberflächenspannung* oder physikalisch korrekter als *Spezifische Oberflächenarbeit*.

$$\sigma := \frac{dW}{dA}, \quad [\sigma] = \frac{Nm}{m^2} = \frac{J}{m^2} = \frac{kg}{s^2} = \frac{N}{m}$$

2.4 Ein einfaches Beispiel

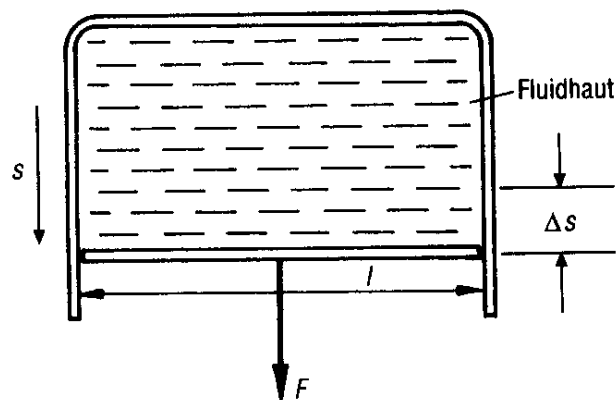


Abbildung 5: Seifenhaut schematisch

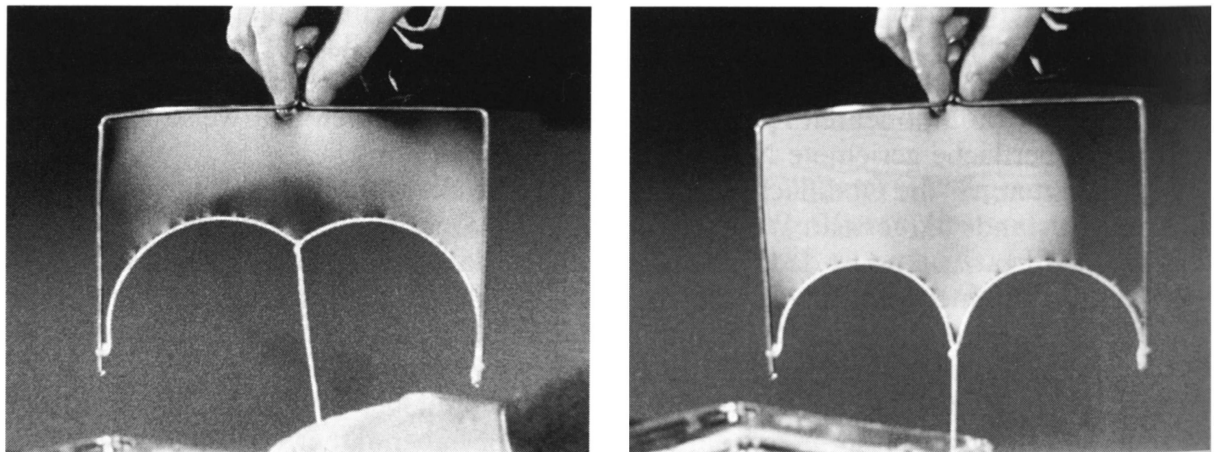


Abbildung 6: Seifenhaut Experiment

Um mit dieser Definition etwas familiärer zu werden, stellen wir uns folgendes Experiment mit einer Seifenhaut vor (siehe Abb. 5 und 6).

Wir stellen fest:

- Es gibt genau eine Kraft, die die Seifenhaut im statischen Gleichgewicht hält. Vergrößern wir die Kraft, so vergrößert sich die Oberfläche kontinuierlich.
- Reduzieren wir die Kraft wieder auf das Niveau der ursprünglichen Haltekraft, so stellt sich erneut ein statisches Gleichgewicht ein. Die Haltekraft F ist unabhängig von der Größe der Oberfläche.

Achtung: Bei einer elastischen Spannung wäre dies anders ! Die Oberflächenspannung hat auch nicht die Einheit einer Spannung !

Es gilt für die Arbeit zur Vergrößerung der Oberfläche:

$$\Delta W = F \Delta s$$

und

$$\Delta A = 2l \Delta s$$

(Es gibt zwei freie Oberflächen)

Also gilt:

$$\sigma = \frac{dW}{dA} = \frac{\Delta W}{\Delta A} = \frac{F \Delta s}{2l \Delta s} = \frac{F}{2l}$$

Dies eröffnet uns die einfachste Möglichkeit mit der OFS zu rechnen. Schneidet man die Oberfläche normal, so erhält man eine resultierende Schnittkraft (Linienkraft) tangential zur Oberfläche, die die Oberfläche gespannt hält.

2.5 Tropfpipette

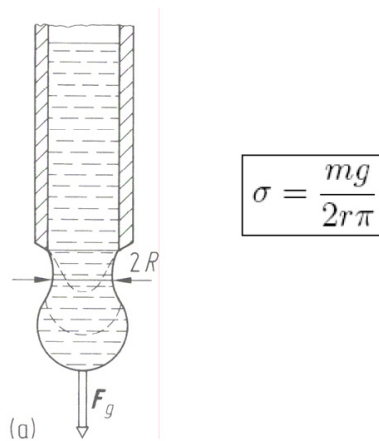


Abbildung 7: Tropfpipette

3 Krümmung

3.1 Zusammenhang zwischen Druck und Krümmung

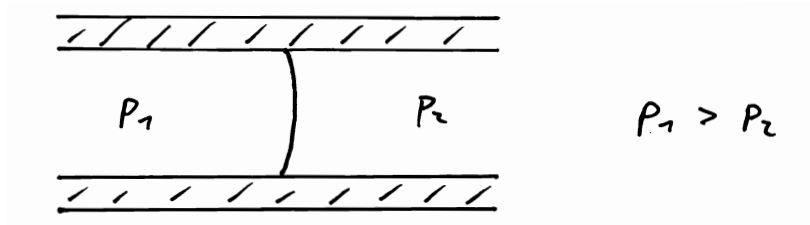


Abbildung 8: Zusammenhang zwischen Druckdifferenz und Krümmung

Wir stellen uns wiederum eine Seifenhaut in einem Rohr vor (Abb. 8). An den zwei Seiten des Rohres liegen unterschiedliche Drücke an. Aus Erfahrung wissen wir, dass die konvexe Seite der Seifenhaut in die Richtung mit dem geringeren Druck zeigen würde. Es gibt also einen Zusammenhang zwischen der Druckdifferenz und der Krümmung der Seifenhaut (und der OFS). Dies soll uns zunächst als Motivation ausreichen, um mal einen näheren Blick auf die Krümmung zu riskieren.

3.2 Differentialgeometrie einer parametrisierten Kurve (2D)

Wir betrachten eine Ebene mit den kartesischen Koordinaten x und y . Wie ihr wisst, lässt sich eine Kurve K in der Ebene nach einer dritten Variablen t (physikalisch meist die Zeit) parametrisieren. Es gilt also:

$$\begin{aligned} P(t) &= (x(t), y(t)) \\ K &= \{P(t) | t \in [a, b] \subset \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Den Geschwindigkeitsvektor zur Zeit t definiert man als:

$$v(t) := \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt}(t) \\ \frac{dy}{dt}(t) \end{pmatrix}$$

Seine 2-Norm (Länge des Vektors) ist die Geschwindigkeit:

$$|v|(t) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}(t)\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}(t)\right)^2}$$

Die zurückgelegte Bogenlänge im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ ist:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}(t)\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}(t)\right)^2} dt$$

Wenn wir die Kurve als Funktion $y = y(x)$ gegeben haben, entspricht dies einer Parametrisierung mit $x(t) = t$. Wir erhalten vereinfacht in Kurzschreibweise:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

Legen wir ein x_1 fest, so erhalten wir für die zurückgelegte Strecke seit x_1 :

$$s(x) = \int_{x_1}^x \sqrt{1 + (y'(z))^2} dz \quad (1)$$

Weil wir das später benötigen werden, leiten wir dies nun unter Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung nach x ab.

$$\frac{ds}{dx}(x) = \sqrt{1 + (y'(x))^2} \quad (2)$$

3.3 Ein Differentialausdruck für die Krümmung (2D)

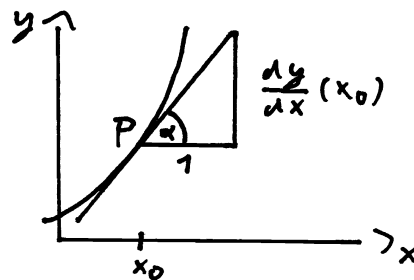


Abbildung 9: Tangentensteigungswinkel

Sei nun die Kurve als Funktion $y = y(x)$ gegeben. Zunächst definieren wir den *Tangentensteigungswinkel* α (Abb. 9) der Anschauung nach als:

$$\alpha(x) := \arctan(y'(x)) \quad (3)$$

Die *Krümmung* K (Abb. 10) definieren wir als:

$$K(s) := \frac{d\alpha}{ds}(s) \quad (4)$$

Den Betrag des Kehrwertes definieren wir als *Krümmungsradius*.

$$R(s) := \left| \frac{1}{K(s)} \right| \quad (5)$$

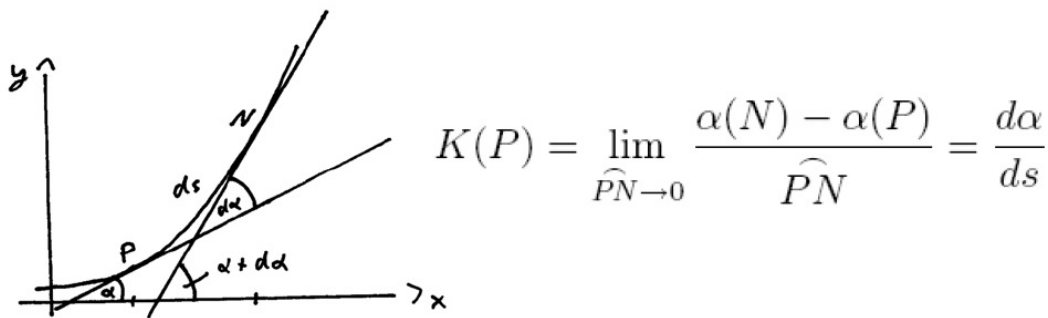


Abbildung 10: Krümmung

3.3.1 Die zweite Herleitung

Es folgen nun zwei Herleitungen für einen Differentialausdruck für die Krümmung in Abhängigkeit von x (also $K(x)$). Die zweite war meine ursprüngliche Herleitung in der ersten Version dieses Skriptes. Die erste ist etwas einfacher und die Beweisidee stammt von Herrn Waldmüller. Die zweite Herleitung verbleibt im Skript, da die Formel, die auf Gleichung (8) führt, oft gewinnbringend eingesetzt werden kann. Beim ersten Lesen könnt ihr den Abschnitt aber getrost überspringen.

Wir wollen also ein $K(x)$. Unsere Krümmung ist aber als $K(s)$ definiert. Wie so oft in der Mathematik denken wir zunächst mal über etwas nach, was mit diesem Problem augenscheinlich überhaupt nichts zu tun hat.

Mit (3) haben wir den Tangentenneigungswinkel in Abhängigkeit von x gegeben ($\alpha(x)$). Logisch das α von x abhängen muss. Wir könnten aber auch etwas umständlich argumentieren, dass man α ja bestimmt auch als Funktion der Bogenlänge s darstellen könnte. Diese wächst ja mit wachsendem x monoton und eignet sich daher ebenso als unabhängige Variable. Hätten wir eine solche Darstellung könnten wir unser $s(x)$ aus Gleichung (1) einsetzen und müssten wieder unser $\alpha(x)$ aus (3) erhalten. Wir können unser $\alpha(x)$ also wie folgt interpretieren.

$$\alpha(x) = \alpha(s(x))$$

Da diese Art zu denken für euch recht neu sein dürfte, schauen wir uns das mal an einem ganz einfachen Beispiel an.

Angenommen wir haben:

$$\begin{aligned} f(s) &= 4s^2 \\ s(x) &= 3x + 5 \end{aligned}$$

Dann erhalten wir durch einsetzen:

$$f(s(x)) = 4(3x + 5)^2 = 36x^2 + 120x + 100 = f(x)$$

Der Funktionsvorschrift von $f(x)$ sieht man es am Ende nicht mehr an, dass sie durch Verkettung entstand, da sie natürlich nur noch von x abhängt.

Zurück zu unserem $\alpha(x)$. Wenn wir unserer Funktion unterstellen, dass sie durch Verkettung entstanden ist, können wir die Kettenregel anwenden, wenn wir nach x differenzieren.

$$\frac{d\alpha}{dx}(x) = \frac{d(\alpha \circ s)}{dx}(x) = \frac{d\alpha}{ds}(s(x)) \frac{ds}{dx}(x) \quad (6)$$

Hier taucht nun plötzlich

$$\frac{d\alpha}{ds}(s(x)) = \frac{d\alpha}{ds}(x) = K(x)$$

auf und die anderen Terme in (6) können wir alle bestimmen. Die linke Seite erhalten wir indem wir (3) nach x differenzieren und den Faktor ganz rechts hatten wir schon im letzten Abschnitt bestimmt. (siehe (2)) Jetzt müssen wir nur noch alles einsetzen und die Gleichung umstellen.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+y'^2} y'' &= K(x) \sqrt{1+y'^2} \\ \Rightarrow K(x) &= \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (7)$$

3.3.2 Die erste Herleitung

Leider haben wir α aber nicht in direkter Abhängigkeit von s gegeben, so dass wir K einfach bestimmen könnten. Mit (3) haben wir aber ein α von x gegeben. Mit (1) steht uns s in Abhängigkeit von x zur Verfügung. Wir bräuchten aber x in Abhängigkeit von s . Wir machen also folgende Annahme: *Sei $s(x)$ bijektiv (oder invertierbar) und seien Funktion und Umkehrfunktion differenzierbar.* (Für viele Fälle ist das nicht zu hoch gestapelt.) Dann gilt bekanntlich:

$$s^{-1}(s(x)) = x = x(s)$$

Wir differenzieren nach x unter Zuhilfenahme der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{ds^{-1}(s(x))}{dx} &= \frac{ds^{-1}}{ds}(s(x)) \frac{ds}{dx}(x) = 1 \\ \Rightarrow \frac{ds^{-1}}{ds}(s(x)) &= \frac{1}{\frac{ds}{dx}(x)} \end{aligned}$$

setzen wir (2) ein, erhalten wir

$$\Rightarrow \frac{dx}{ds}(s(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+(y'(x))^2}} \quad (8)$$

Nun wenden wir uns wieder der Definition der Krümmung (4) zu und erhalten ein weiteres Mal nach der Kettenregel und mit Benutzung von (3) und (8) in Zeile 3 der folgenden Gleichungskette die Krümmung in direkter Abhängigkeit von x .

$$\begin{aligned}
 K(s) &= \frac{d\alpha}{ds}(s) = \frac{d\alpha(x(s))}{ds} \\
 &= \frac{d\alpha}{dx}(x(s)) \frac{dx}{ds}(s) \\
 &= \frac{1}{1+y'^2} y'' \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \\
 \Rightarrow K(x) &= \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \tag{9}
 \end{aligned}$$

3.4 Krümmung einer Fläche (3D)

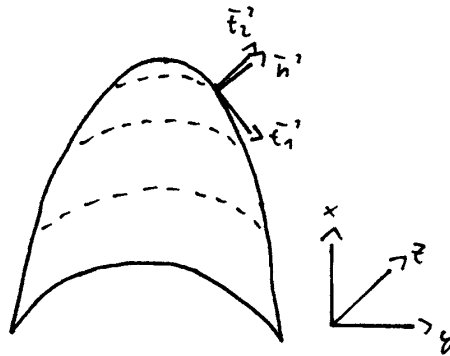


Abbildung 11: Schnitt Fläche mit \vec{t}_1 Schnittebene

Nun können wir die Krümmung einer gegebenen Funktion angeben. In der Praxis sind aber natürlich Krümmungen von Flächen (zweidimensionale parametrisierte Mannigfaltigkeiten in \mathbb{R}^3) relevant. Wenn uns eine Fläche vorliegt, und wir in jedem Punkt \vec{x} einen äußeren Normalenvektor \vec{n} bestimmen können, (der Vektor, der auf der Tangentialebene senkrecht steht) haben wir aber schon das nötige Handwerkszeug, um auch hier die Krümmung zu bestimmen. (Zumindest, wenn das Problem brav genug ist.)

Dazu wählen wir zunächst einen festen Punkt \vec{x} auf der Oberfläche, an dem wir die Krümmung bestimmen wollen, und einen „Schnitt“-Vektor \vec{t}_1 in der Tangentialebene an diesen Punkt. Die Ebene, die der Schnittvektor mit dem Normalenvektor aufspannt, soll unsere Schnittebene sein. Der Schnitt der Schnittebene mit der Fläche ist dann wiederum eine Kurve in der Schnittebene (Abb 11). Lässt sich diese lokal als Funktion darstellen, so können wir die Krümmung (2D) K_1 bestimmen. Das gleiche machen wir nun noch für einen weiteren Schnittvektor, der orthogonal auf dem alten Schnittvektor und auf dem

Normalenvektor steht, (z.B.: $\vec{t}_2 = \vec{t}_1 \times \vec{n}$) und wir erhalten K_2 . Die Summe

$$K := K_1 + K_2 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (10)$$

nennen wir die *Mittlere Krümmung* der Fläche, in dem zuvor fest gewählten Punkt \vec{x} . Diese Definition scheint zunächst wenig sinnvoll, da K nicht nur von \vec{x} , sondern auch von den gewählten Schnittvektoren \vec{t}_1 und \vec{t}_2 abhängt ($K = K(\vec{x}, \vec{t}_1)$ / nur einer ist frei wählbar). Tatsächlich ist die Mittlere Krümmung jedoch unabhängig von der Wahl dieser Vektoren ($K = K(\vec{x})$). Der Beweis ist jedoch nicht auf die Schnelle zu erbringen, und erfordert einiges mehr an Mathematik, als wir uns an dieser Stelle zumuten wollen. Natürlich kann man auch hier unter bestimmten Voraussetzungen einen Differentialausdruck für die Krümmung finden, der sich direkt aus der Parametrisierung ableiten lässt und nicht so sperrig ist, wie unsere Herangehensweise, aber eine Herleitung würde auch hier den Rahmen sprengen.

4 Erster Satz von Laplace

4.1 Herleitung

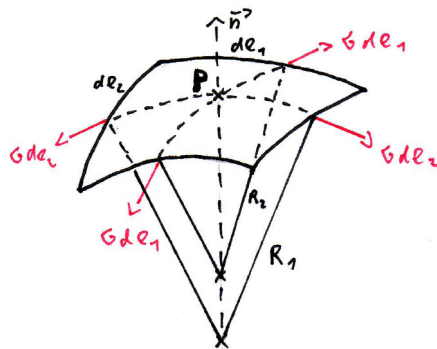


Abbildung 12: Infinitesimales Flächenstück

Wenden wir uns nun also wieder dem Zusammenhang zwischen Krümmung und Druckdifferenz zu. Schneiden wir ein infinitesimales Flächenstück aus der Oberfläche, so erhalten wir an den Schnittträgern jeweils die in 2.4 diskutierten Schnittkräfte. (Siehe Abb. 12) Wenn die Oberfläche nicht eben oder eine „gleichmäßige“ Sattelfläche ist, gibt es eine resultierende Kraft F_R , die gleich dem Produkt der an der Oberfläche anliegenden Druckdifferenz und dem Inhalt der Fläche ist.

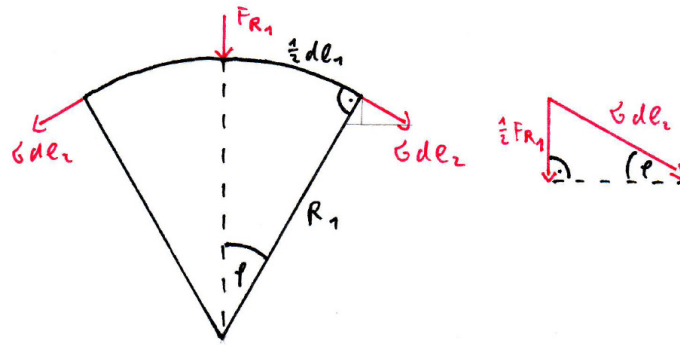


Abbildung 13: Schnitt in R_1 Richtung

Zunächst schauen wir uns das Problem in der zu R_1 gehörenden Schnittebene an (Abb. 13). Die Horizontalkomponenten von σdl_2 auf beiden Seiten annullieren sich gegenseitig. Für die Vertikalkomponente lesen wir ab (siehe Abb 13):

$$\sin \varphi = \frac{\frac{1}{2} F_{R_1}}{\sigma dl_2}$$

Für sehr kleine Größen ist $\sin \varphi \approx \varphi$ (Taylorentwicklung). Für infinitesimale Größen gilt sogar $\sin \varphi = \varphi$. (Dieses Kalkül wirkt im ersten Moment recht unheimlich, lässt sich jedoch auch exakt mathematisch rechtfertigen.) Weiter lesen wir aus der Geometrie ab (siehe Abb. 13):

$$\varphi = \frac{\frac{1}{2} dl_1}{R_1}$$

Gleichsetzen führt zu:

$$\frac{\frac{1}{2} dl_1}{R_1} = \frac{\frac{1}{2} F_{R_1}}{\sigma dl_2}$$

Umformen führt auf:

$$\frac{F_{R_1}}{dl_1 dl_2} = \sigma \frac{1}{R_1} = \sigma K_1$$

Für die zweite Schnittrichtung erhalten wir analog:

$$\frac{F_{R_2}}{dl_1 dl_2} = \sigma \frac{1}{R_2} = \sigma K_2$$

Damit gilt insgesamt für Gesamtergebnis $F_R = F_{R_1} + F_{R_2}$:

$$\Delta p = \frac{F_R}{dl_1 dl_2} = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \sigma K \quad (11)$$

Diese Gleichung ist der *erste Satz von Laplace*. Es bleibt die Frage, welches Vorzeichen der Drucksprung an der Oberfläche hat. Wir halten es hier wie die Dachdecker und belassen es bei der Regelung, dass auf der konkaven Seite der Oberfläche der Druck größer ist. (siehe Abb. 8)

4.2 Einfache Beispiele

Körper	Δp
Ebene	0
Zylinder	$\frac{\sigma}{R}$
Kugel	$\frac{2\sigma}{R}$
Seifenblase(Kugel)	$\frac{4\sigma}{R}$

Warum ist die Seifenblase eine Kugel ?

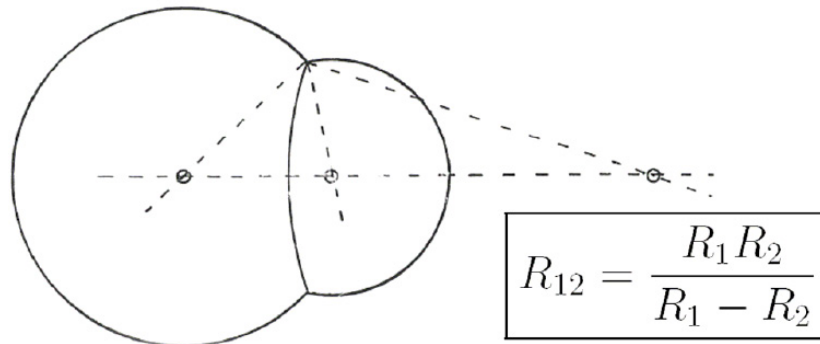


Abbildung 14: Ebenes Seifenblasenproblem

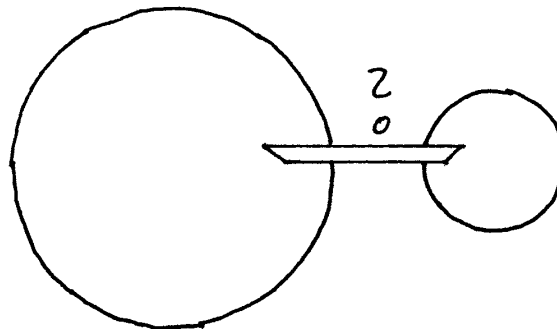


Abbildung 15: Zwei Seifenblasen werden durch ein Rohr verbunden - Was passiert ?

5 Spreitung und Randwinkel

Bisher haben wir uns nur mit der Grenzschicht zwischen einer flüssigen und einer gasförmigen Phase beschäftigt, was auf den Begriff der Oberflächenspannung führte. Meistens ist außerdem noch eine feste Phase relevant. Zum Beispiel dann, wenn sich die Flüssigkeit in einem Behälter befindet. Die Oberflächenspannung ist in diesem Sinne ein Spezialfall einer spezifischen Grenzschichtenergie (flüssig-gasförmig $\sigma = \sigma_{fg}$).

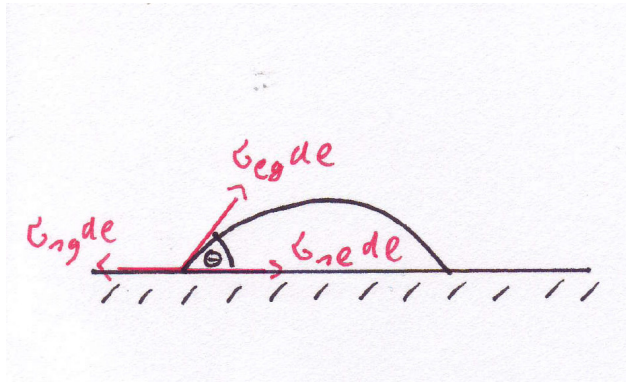


Abbildung 16: Definition des Randwinkels

Schneiden wir in einem liegenden (statischen) Tropfen den Punkt frei, an dem alle drei Phasen zusammentreffen, so müssen sich die drei resultierenden Linienkräfte das Gleichgewicht halten (siehe Abb. 16). Aus dem Gleichgewicht der Kräfte in horizontaler Richtung erhalten wir die Definition des *statischen Randwinkels*:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 : \quad & -\sigma_{sg} dl + \sigma_{sl} dl + \sigma_{lg} dl \cos \theta = 0 \\ \Rightarrow \quad & \theta := \arccos \left(\frac{\sigma_{sg} - \sigma_{sl}}{\sigma_{lg}} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

Falls $\sigma_{sg} > \sigma_{sl} + \sigma_{lg}$ gilt, so ist es klar, dass sich kein Randwinkel einstellt. Man spricht dann von Spreitung. Der Film würde sich in diesem Fall immer weiter ausdünnen. Allgemein definieren wir den *Spreitungskoeffizienten* als:

$$S := \sigma_{sg} - (\sigma_{sl} + \sigma_{lg}) \quad (13)$$

Bei $S > 0$ tritt dann Spreitung auf und der Spreitungskoeffizient ist ein Maß für die Spreitungsgeschwindigkeit. Bei $S < 0$ können wir einen Randwinkel definieren. Wir sprechen bei $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ von teilweiser Benetzung und bei $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ von Nichtbenetzung. Dass man für $S > 0$ keinen Randwinkel definieren kann, können wir auch aus mathematischer Sicht ergründen. Setzen wir (12) in (13) ein, so erhalten wir:

$$S := \sigma_{lg} (\cos \theta - 1)$$

Aus $S > 0$ folgt dann sofort der Widerspruch $\cos \theta > 1$.

6 Kapillares Steigen

Nun haben wir alle Voraussetzungen, um uns ein interessantes Phänomen der Oberflächenspannung mal etwas genauer anzusehen: Das kapillare Steigen. Taucht man in einen Behälter, der mit einer teilweise benetzenden Flüssigkeit gefüllt ist, eine Kapillare (sehr dünnes Rohr), so steigt die Flüssigkeit in der Kapillaren höher als die freie

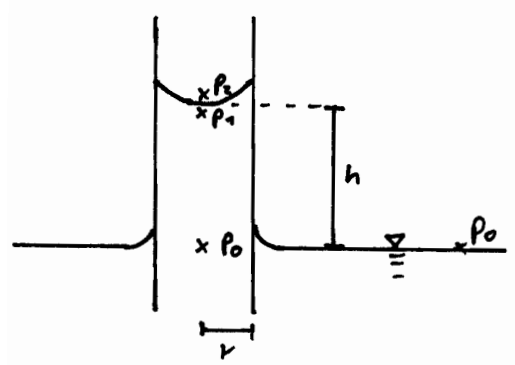


Abbildung 17: Kapillares Steigen

Oberfläche in dem Behälter (siehe Abb. 17). Der Grund hierfür ist, dass sich eine zum Randwinkel passende Krümmung der Oberfläche einstellt, die nach dem ersten Satz von Laplace (11) einen Unterdruck hervorruft, der die Flüssigkeit nach oben zieht.

Wir wollen nun die Steighöhe berechnen. Aufgrund der Rotationssymmetrie des Systems wissen wir, dass auch die Oberfläche rotationssymmetrisch ist. Zusätzlich wollen wir annehmen, dass die Oberfläche gleichmäßig gekrümmt ist; dass also $R := R_1 = R_2$ für jeden Punkt der Oberfläche gleich groß ist. (Für kleine Kapillare ist das in guter Näherung erfüllt.) Da sich am Rand der Oberfläche der statische Randwinkel zum Festkörper einstellen muss, können wir den Krümmungsradius elementargeometrisch bestimmen (siehe Abb. 18).

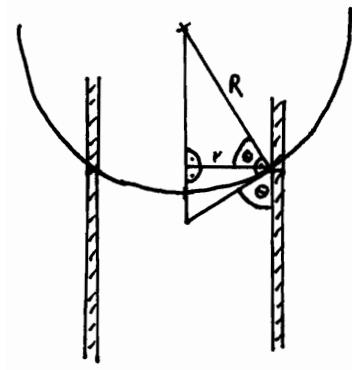


Abbildung 18: Geometrie: Krümmungsradius und Randwinkel

$$R = \frac{r}{\cos \theta} \quad (14)$$

Nach der hydrostatischen Höhengleichung gilt:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 - \rho_l g h \\ p_2 &= p_0 - \rho_g g h \end{aligned}$$

Für den Drucksprung gilt nach dem ersten Satz von Laplace (11) und (14):

$$\Delta p = \sigma \frac{2}{R} = \frac{2}{r} \cos \theta$$

Da die Oberfläche nach oben hin konkav ist, gilt:

$$p_2 - \Delta p = p_1$$

Nun brauchen wir nur noch alles einzusetzen und nach h aufzulösen:

$$\begin{aligned} p_0 - \rho_g g h - \sigma \frac{2}{r} \cos \theta &= p_0 - \rho_l g h \\ (\rho_l - \rho_g) g h &= \frac{2\sigma \cos \theta}{r} \\ h &= \frac{2\sigma \cos \theta}{(\rho_l - \rho_g) g r} \end{aligned}$$

Wir erkennen, dass die Steighöhe unter Erdgravitation um so größer ist, je kleiner der Radius ist. Bei kompensierter Gravitation gilt $g \approx 0$. Deshalb spielt hier die Größe der Kapillare keine Rolle. Die Steighöhe steigt hier kontinuierlich an.

7 Meniskuskontur an ebener Wand

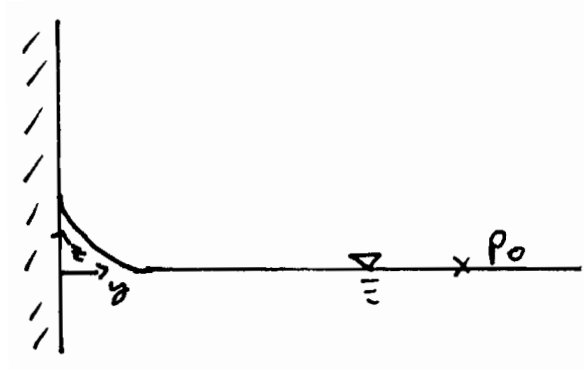


Abbildung 19: Meniskuskontur an einer ebenen Wand

Zum Schluss wollen wir noch die Meniskuskontur an einer ebenen Wand berechnen. Wir stellen uns vor, wir hätten ein hinreichend großes rechteckiges Becken, das mit einem teilweise benetzenden Fluid gefüllt ist, so dass wir das Problem als das folgende zweidimensionale Problem betrachten können (siehe Abb. 19).

Gesucht ist also die Funktion der Kontur $z(y)$. Für einen Punkt der Oberfläche gilt nach der hydrostatischen Höhengleichung:

$$\begin{aligned} p_l &= p_0 - \rho_l g z \\ p_g &= p_0 - \rho_g g z \end{aligned}$$

Für den Drucksprung gilt nach dem ersten Satz von Laplace (11):

$$\Delta p = \sigma K = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Wir nehmen aufgrund des großen Beckens an, dass $\frac{1}{R_2} = 0$ gilt. Für die erste Krümmung setzen wir nach (10) an:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{z''}{(1+z'^2)^{3/2}}$$

Da die Oberfläche nach oben hin konkav ist gilt:

$$p_g - \Delta p = p_l$$

Nun brauchen wir nur noch alles einzusetzen und erhalten die folgende DGL:

$$\begin{aligned} p_0 - \rho_g g z - \sigma \frac{z''}{(1+z'^2)^{3/2}} &= p_0 - \rho_l g z \\ (\rho_l - \rho_g) g z &= \sigma \frac{z''}{(1+z'^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Da wir zum Rechnen gerne dimensionslose Größen haben, führen wir die Kapillarlänge L_c ein als

$$L_c := \sqrt{\frac{\sigma}{(\rho_l - \rho_g)g}} \quad (15)$$

Damit erhalten wir

$$\frac{z}{L_c} = L_c \frac{z''}{(1+z'^2)^{3/2}}$$

eine Gleichung mit den dimensionslosen Größen $\tilde{z} := \frac{z}{L_c}$, $\tilde{z}' := z'$ und $\tilde{z}'' := z''$:

$$\tilde{z} - \frac{\tilde{z}''}{(1+\tilde{z}'^2)^{3/2}} = 0$$

Multiplikation mit \tilde{z}' führt mit den Nebenrechnungen

$$\frac{d}{d\tilde{y}} (\tilde{z}^2) = 2\tilde{z}\tilde{z}' \quad \frac{d}{d\tilde{y}} \left(\frac{1}{[1+\tilde{z}'^2]^{\frac{1}{2}}} \right) = -\frac{\tilde{z}''\tilde{z}'}{[1+\tilde{z}'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

auf

$$\frac{d}{d\tilde{y}} \left(\frac{\tilde{z}^2}{2} + \frac{1}{[1+\tilde{z}'^2]^{\frac{1}{2}}} \right) = 0$$

Also gilt mit Integration

$$\frac{\tilde{z}^2}{2} + \frac{1}{[1+\tilde{z}'^2]^{\frac{1}{2}}} = C_1$$

Für $\tilde{y} \rightarrow \infty$ gehen \tilde{z} und \tilde{z}' gegen 0, womit $C_1 = 1$ gilt. Für $\tilde{y} = 0$ ist $\tilde{z}' = \tan \alpha = \tan(\theta - \frac{\pi}{2}) = \frac{-\cos \theta}{\sin \theta} = -\cot \theta$ (Achtung: $\alpha < 0$). Wir erhalten also:

$$\frac{\tilde{z}_0^2}{2} + \frac{1}{[1 + \cot^2 \theta]^{\frac{1}{2}}} = 1$$

Mit der bekannten Formel $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ folgt schnell

$$\frac{1}{[1 + \cot^2 \theta]^{\frac{1}{2}}} = \sin \theta$$

Damit ist die Steighöhe an der Wand:

$$\tilde{z}_0 = [2(1 - \sin \theta)]^{\frac{1}{2}} \quad (16)$$

Bleibt die DGL

$$\frac{\tilde{z}^2}{2} + \frac{1}{[1 + \tilde{z}'^2]^{\frac{1}{2}}} - 1 = 0$$

zu lösen. Nach langer Rechnung folgt schließlich:

$$\tilde{y} = -\operatorname{arccosh} \frac{2}{\tilde{z}} + \operatorname{arccosh} \frac{2}{\tilde{z}_0} + (4 - \tilde{z}^2)^{\frac{1}{2}} - (4 - \tilde{z}_0^2)^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

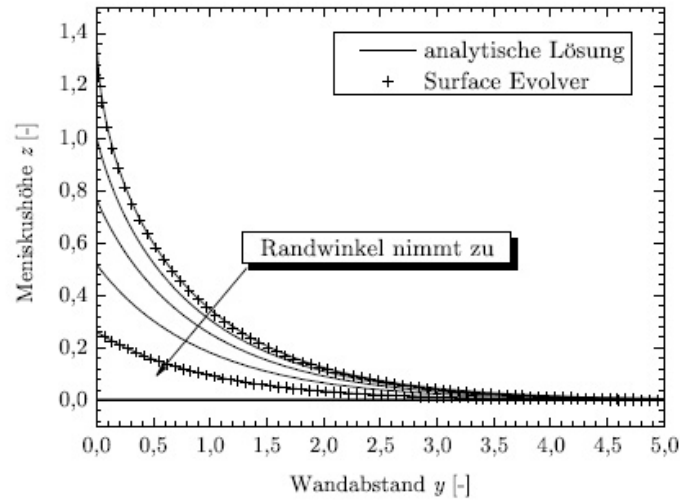


Abbildung 20: Meniskuskonturen für die Randwinkel $\theta = 0^\circ; 30^\circ; 45^\circ; 60^\circ; 75^\circ; 90^\circ$